Induksi Matematika

(Bagian 2)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika STEI - ITB

Prinsip Induksi Kuat

- Kadang-adang diperlukan lebih dari satu hipotesis induksi untuk membuktikan sebuah pernyataan. Untuk itu kita menggunakan prinsip induksi kuat (*strongly induction principle*).

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat. Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

- Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

  1. $p(n_0)$ benar, dan
  2. jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua $n \geq n_0$.

- Pada poin 2 terdapat lebih dari satu hipotesis, yaitu mengasumsikan $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, …, $p(n)$ benar.

Contoh 6. Bilangan bulat positif disebut bilangan prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut hanya habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi).

Kita perlu menunjukkan bahwa n + 1 juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

- Jika n + 1 sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
- Jika n + 1 bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis n + 1 tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, n + 1 jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$. ■

- Pada contoh 6 di atas, kita membuat hipotesis lebih dari satu, yaitu:

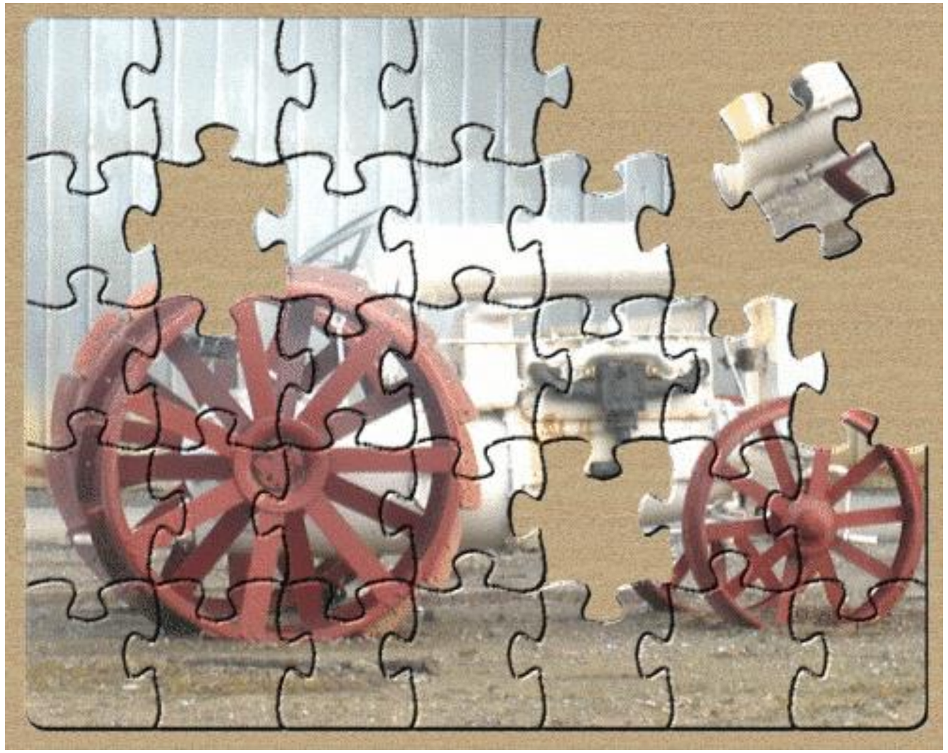
  - asumsikan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - asumsikan 3 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - …
  - asumsikan n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima

- Karena $2 \leq a \leq b \leq n$, maka menurut hipotesis induksi di atas *a* dan *b* juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

- Dengan menggunakan banyak hipotesis, maka pembuktian kita menjadi lebih kuat.

- Jika hanya satu saja hipotesisnya, yaitu mengasumsikan n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, maka pembuktiannya menjadi kurang kuat.

Contoh 7. [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar.



Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar.

Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah.

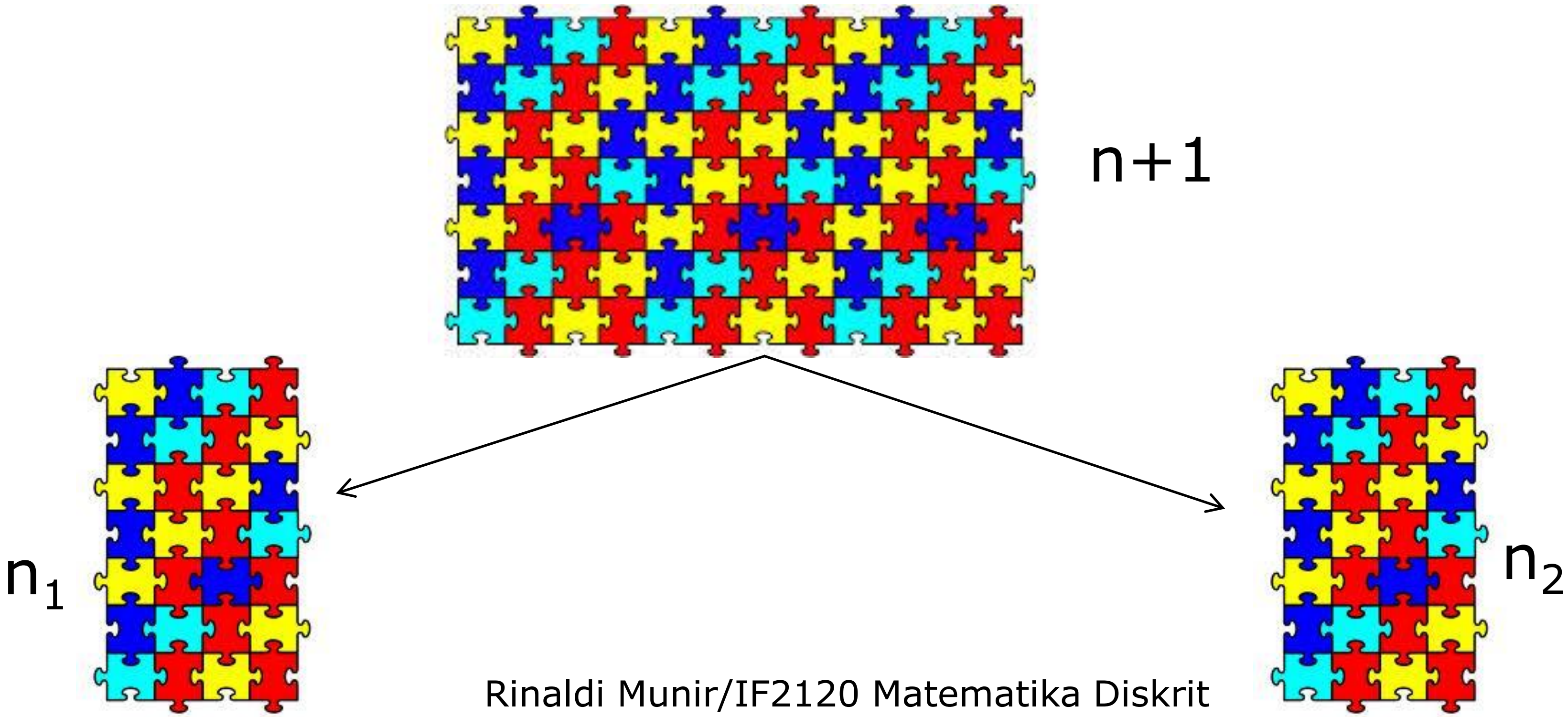
Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan (n = 1, 2, 3, …, k) diperlukan sejumlah n – 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk n + 1 potongan diperlukan n langkah.

Bagilah n + 1 potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$.



Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar.

Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 – 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 – 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain.

Digabungkan dengan satu langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$(n_1 – 1) + (n_2 – 1) + 1$ langkah terakhir $= (n_1 + n_2) – 2 + 1 = n + 1 – 1 = n$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu. ■

Apa yang salah dari pembuktian induksi matematik ini?

Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama.

Basis induksi: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $p(1)$ benar.

Langkah induksi: Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama. (hipotesis)

Untuk membuktikan $p(n+1)$ benar, tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, $n+1$.

Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama (1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, $n+1$) juga harus berwarna sama.

Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua $n+1$ kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar. Kesimpulannya: p(n) benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar untuk himpunan dengan dua ekor kuda (yaitu ketika $n + 1 = 2$), sebab dua himpunan yang dibentuk tidak akan pernah beririsan. Himpunan pertama berisi kuda bernomor 1, sedangkan himpunan kedua kuda bernomor 2.

- Apa yang salah dalam pembuktian dengan induksi berikut ini?

Teorema: Untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n, berlaku bahwa $5n = 0$.

Basis induksi: Untuk $n = 0$, maka $5 \cdot 0 = 0$ benar)

Langkah induksi: Misalkan bahwa $5n = 0$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n. (hipotesis induksi)

Untuk membuktikan $p(n+1)$, tulislah $n + 1 = i + j$, yang dalam hal ini i dan j adalah bilangan asli yang kurang dari $n+1$.

Selanjutnya, $5(n+1) = 5(i + j)$

$= 5i + 5j$

$= 0 + 0$ (menurut hipotesis induksi)

$= 0$

Darikedua langkah di atas, maka terbukti untuk setiap bilangan bulat tak-negatif n, berlaku $5n = 0$.

Jawaban:

Kesalahan terjadi ketika berpindah dari n = 0 ke n = 1, sebab 1 tidak dapat ditulis sebagai penjumlahan dua buah bilangan asli.

Aplikasi Induksi Matematik untuk membuktikan kebenaran program

```
function Exp(a:integer, m: integer )
{ Fungsi untuk menghitung a^m }
Deklarasi
   k, r : integer
Algoritma:
   r ← 1
   k ← m
   while (k > 0)
        r ← r * a
        k ← k – 1
   end
   return r
   { Computes : r = a^m
     Loop invariant : r x a^k = a^m
   }
```

Buktikan algoritma di atas **benar** dengan induksi matematika, yaitu di akhir algoritma fungsi mengembalikan nilai a^m

Misal r_n dan k_n adalah nilai berturut-turut dari r dan k, setelah melewati kalang (*loop*) *while* sebanyak n kali, $n \geq 0$.

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi: $r_n \times a^{k_n} = a^m$, $n \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa $p(n)$ benar dengan induksi matematika

(i) Basis:

Untuk $n = 0$, maka $r_0 = 1$, $k_0 = m$.

Maka $p(0)$ benar sebab

$$r_0 \times a^{k_0} = a^m \Leftrightarrow 1 \times a^m = a^m$$

(ii) Langkah Induksi

Asumsikan $p(n)$ benar untuk $n \geq 0$, yaitu setelah melewati kalang n kali, yaitu $r_n \times a^{k_n} = a^m$.
(hipotesis)

Kita harus menunjukkan $p(n+1)$ benar, yaitu untuk satu tambahan iterasi kalang *while*, maka

$$r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Setelah satu tambahan iterasi melewati kalang,

$$r_{n+1} = r_n \times a \text{ dan } k_{n+1} = k_n - 1 \quad \text{maka}$$

$$r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = (r_n \times a) \times a^{k_n - 1}$$

$$= (r_n \times a) \times a^{k_n} \times a^{-1}$$

$$= r_n \times a^{k_n} = a^m \qquad \text{(dari hipotesis induksi)}$$

Jadi, $r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m \rightarrow p(n+1)$ benar

Karena basis dan langkah induksi benar, maka $p(n)$ adalah benar untuk setiap $n \geq 0$. Jadi algoritma benar.

Latihan 9

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk n ≥ 1 turunan $f(x) = x^n$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$

2. Suatu *string* biner panjangnya *n* bit. Jumlah *string* biner yang mempunyai bit 1 sejumlah genap adalah 2^{n-1}. Buktikan pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.

3. Buktikan dengan induksi matematik bahwa jika A, B_1, B_2, ..., B_n adalah himpunan, $n \geq 2$, maka

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_n)$$

4. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa a^n = 1 untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

Basis induksi. Untuk n = 0, jelas a^0 = 1 adalah benar sesuai definisi a^0.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, …, n, yaitu a^0 = 1, a^1 = 1, a^2 = 1, …, a^n = 1. Kita ingin memperlihatkan bahwa $a^{(n+1)}$ = 1. Untuk menunjukkan hal ini, maka

$$a^{n+1} = \frac{a^n \,.\, a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} \quad \text{(dari hipotesis induksi)}$$

$$= 1$$